

Simulation du comportement mécanique des alliages de titane pour les procédés de mise en forme à froid

B. Revil-Baudard¹, E. Massoni¹

¹ Mines ParisTech, CEMEF - Centre de Mise en Forme des Matériaux, CNRS UMR 7635, BP 207, 1 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France.
benoit.revil@mines-paristech.fr, elisabeth.massoni@mines-paristech.fr

Résumé — Il est proposé, dans ce travail, un modèle de comportement mécanique anisotrope des alliages de titane. Pour suivre la matière, les axes d'anisotropie sont réactualisés par le gradient de la transformation. Le comportement élasto-plastique se compose d'un critère de plasticité anisotrope, d'un écrouissage cinématique et isotrope. Plusieurs critères de plasticité sont implémentés, dont celui de Cazacu 2006 pour les métaux à structure hexagonale compacte. La simulation de plusieurs procédés de mise en forme (emboutissage, gonflage) conclut cette étude.

Mots clés — Plasticité, Anisotropie, Écrouissage, Simulation E.F., Alliages de titane.

1 Introduction

Les alliages de titane sont aujourd'hui fortement utilisés dans l'industrie aéronautique. Les tôles utilisées pour les procédés de mise en forme proviennent d'une opération de laminage à chaud. Dans un objectif de réduction des coûts de production, cette opération s'effectue maintenant à froid. La conséquence de ce changement est une modification de structure conduisant à une anisotropie du matériau très marquée. L'objectif de ce travail est donc la modélisation du comportement anisotrope du titane au cours de la mise en forme à froid. Hill propose un critère de plasticité simple et largement utilisé pour modéliser le comportement des aciers [1]. D'autres critères plus complexes et non quadratiques ont été développés pour la modélisation de l'anisotropie des alliages d'aluminium ou autres alliages métalliques [2]. Cazacu et al. [3] ont étendu cette famille de critère pour les matériaux hexagonaux compacts, tel les alliages de titane.

Le suivi des axes d'anisotropie au cours de la transformation permet une bonne modélisation des procédés de mise en forme. D'après les conclusions de Duchêne et al. [4], une approche cinématique peut être utilisée pour la mise en place d'un modèle de comportement mécanique macroscopique. L'implémentation dans un logiciel de simulation par Éléments Finis (E.F.) implicite sera présentée afin de comparer l'influence du critère d'anisotropie sur les résultats pour les procédés de mise en forme de tôles d'alliage de titane.

2 La description cinématique du modèle

Le suivi de la matière, et donc des axes d'anisotropie au cours de la transformation, permet de modéliser au mieux le comportement mécanique des matériaux anisotropes. Les hypothèses suivantes sont émises :

- l'anisotropie initiale est supposée orthotrope du fait de l'opération de laminage précédente. L'orientation initiale de la direction de laminage est définie par un angle γ .

- Le modèle est développé pour la mise en forme de tôles minces : l'axe 3 d'anisotropie reste normal à la tôle.
- toutes les lois de comportement matériau sont exprimées dans la base matérielle $\{a_i\}, i = 1..3$.

Dans ce papier, les vecteurs sont représentés par $\{\cdot\}$ et les tenseurs par $[\cdot]$. La transposée, l'inverse et la trace d'une matrice sont exprimées respectivement par $[\cdot]^{-1}$, $[\cdot]^T$ et $tra(\cdot)$, le produit tensoriel par \otimes . Pour l'algorithme d'implémentation, la notation de Voigt est utilisée pour transformer un vecteur en tenseur.

Les axes d'anisotropie doivent être réactualisés au cours de la transformation. Deux grandeurs sont représentatives de l'évolution de la matière au cours d'un procédé de mise en forme. Il s'agit du gradient de la transformation $[F]$, ou de la matrice de rotation rigide $[R]$, issue de la décomposition polaire $[F] = [R][U]$, $[U]$ étant le tenseur des déformations pur droit. La comparaison de l'évolution analytique des axes d'anisotropie $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ au cours d'un test de cisaillement simple (fig.1) montre que la solution la plus conforme à la réalité est la réactualisation par le gradient de la transformation $[F]$ (axes f_1 et f_2).

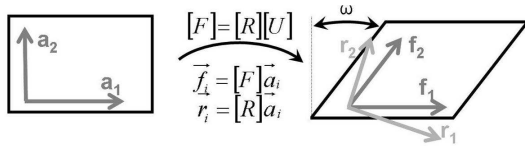


Figure 1 – Evolution analytique des axes d'anisotropie au cours d'un cisaillement simple : réactualisation par $[F]$ ou par $[R]$.

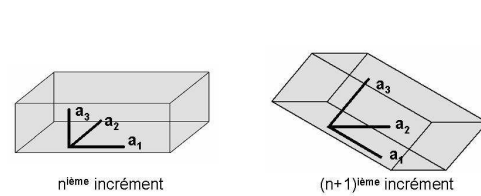


Figure 2 – Evolution des axes d'anisotropie durant la simulation E.F.

Les axes d'anisotropie sont donc réactualisés par les relations suivantes au cours de la transformation (fig.2) :

$$\{a_i^{n+1}\} = \|[F]^n \{a_i^n\}\| \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$\{a_3^{n+1}\} = \|\{a_1^{n+1}\} \wedge \{a_2^{n+1}\}\| \quad (2)$$

Avec $[F]^n$ le gradient de la transformation pour l'incrément n. les axes d'anisotropie situés dans le plan de la tôle ($\{a_1\}, \{a_2\}$) suivent la matière et le dernier axe $\{a_3\}$ est normal aux deux autres, donc au plan de la tôle.

Pour être fiable en grandes déformations, un modèle mécanique doit être objectif. Les équations d'équilibre sont résolues dans le repère de référence ($\{e_i\}, i = x, y, z$). Pour garder l'objectivité du modèle, les contraintes doivent être calculées dans la base matérielle $\{a_i\}, i = 1..3$. En choisissant une réactualisation des axes d'anisotropie par $[F]$, le repère matériel n'est plus orthonormal. Notre choix d'exprimer les contraintes dans un repère non orthogonal découle des travaux récents en structures composites [5] ou d'autres plus anciens sur le formage des structures fines en grandes transformations [6].

Un transport entre la base de référence orthonormée ($\{e_i\}, i = x, y, z$) et la base matérielle ($\{a_i\}, i = 1..3$), supposée covariante dans un espace vectoriel euclidien, doit être définie (fig.3). La variance des grandeurs tensorielles est importante, le tenseur des contraintes $[\sigma]$ est un tenseur contravariant et le tenseur des déformations $[\epsilon]$ est covariant. Le transport de ces grandeurs entre les deux bases du modèle se base sur deux opérations différentes : le 'pull forward' (de la base de référence à la base matérielle) et le 'pull back' (de la base matérielle à la base référence). Selon la variance des tenseurs transportés, les relations de transport sont différentes [7].

La matrice de changement de base ($[T].[M]$) est définie en deux temps. Dans un premier temps, on transporte la grandeur de la base de référence ($\{e_i\}, i = x, y, z$) à une base intermédiaire

orthogonale ($\{a_{1(int)}\}, \{a_{2(int)}\}, \{a_3\}$) grâce à deux rotations, la première d'un angle φ autour de $\{e_x\}$ et la seconde d'un angle ψ autour de $\{a_{2(int)}\}$. La matrice $[M]$ s'exprime donc :

$$[M]_{(e_x, e_y, e_z) \rightarrow (a_{1(int)}, a_{2(int)}, a_3)} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\varphi \sin\psi & \cos\varphi \sin\psi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi \sin\varphi & \cos\psi \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dans un second temps, la grandeur est transportée dans la base matérielle ($\{a_i\}, i = 1..3$) (fig.4). La matrice de changement de base $[T]$ est donc de la forme :

$$[T]_{(a_{1(int)}, a_{2(int)}, a_3) \rightarrow (a_1, a_2, a_3)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha + \theta) & 0 \\ \sin\alpha & \sin(\alpha + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

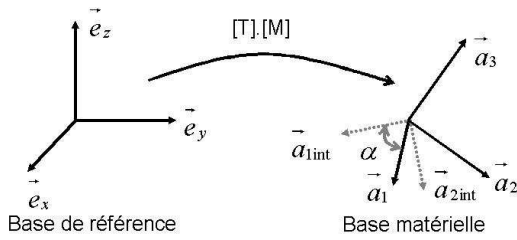


Figure 3 – Transport des grandeurs tensorielles entre la base globale ($\{e_i\}, i = x, y, z$) et la base matérielle ($\{a_i\}, i = 1..3$).

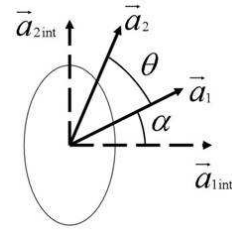


Figure 4 – Transport des grandeurs tensorielles entre la base intermédiaire ($\{a_{1(int)}\}, \{a_{2(int)}\}, \{a_3\}$) et la base matérielle ($\{a_i\}, i = 1..3$).

3 Le comportement élastoplastique anisotrope

Notre modèle élastoplastique nécessite la définition de plusieurs lois de comportement :

- un comportement élastique isotrope défini par la loi de Hooke : $\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{tra}(\sigma) \delta_{ij}^j$, où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et δ_{ij}^j le symbole de Kronecker. La matrice $[C]$, carrée de taille 6, est déduite à partir de la loi de Hooke telle que : $\{\epsilon\} = [C] \{\sigma\}$.
- une loi d'écrouissage cinématique pour définir le tenseur cinématique $\{X\}$. La loi d'Armstrong et Friedrick est choisie [8] : $\{\dot{X}\} = D\{\dot{\epsilon}^p\} - \xi\{X\} |\dot{\epsilon}^p|$, avec $\{\dot{\epsilon}^p\}$ le tenseur des taux de déformation et $\dot{\epsilon}^p$ le taux de déformation plastique équivalent. Cette loi associe un écrouissage cinématique linéaire, contrôlé par le paramètre matériau D et un terme modélisant la recristallisation dynamique, paramètre par ξ . La combinaison d'un écrouissage cinématique linéaire avec une partie non linéaire permet une bonne représentation pour les petites et grandes déformations.
- une surface convexe pour définir la surface de plasticité initiale : $f(\sigma - X)$.
- Une loi d'écrouissage isotrope dérivable pour définir la contrainte d'écoulement σ_0 .

Le comportement mécanique est donc défini par le critère de plasticité F_p :

$$F_p = f(\sigma - X) - \sigma_0, \quad F_p \leq 0 \quad (5)$$

Selon la valeur de F_p , le comportement du matériau est soit élastique ($F_p < 0$), soit élastoplastique ($F_p = 0$). Ce papier se focalise sur le comportement plastique, et plus particulièrement sur l'influence du critère de plasticité. Deux critères ont été implémentés : le critère de Hill 1948 [1] et le critère de Cazacu 2006 pour les métaux hexagonaux compacts [3]. La suite de ce papier se focalisera sur le critère de Cazacu et son implémentation.

3.1 Le critère de plasticité de Cazacu

Cazacu et al. [3] ont développé un critère de plasticité pour les matériaux hexagonaux compacts. Le comportement plastique n'est plus considéré comme symétrique en traction et en compression. Ce critère est non quadratique et indépendant de la pression hydrostatique. Il s'exprime de la manière suivante :

$$f(\tilde{S}) = \frac{1}{Q} \left(\sum_{i=1}^3 (|\tilde{S}_i| - k\tilde{S}_i)^a \right)^{1/a} \quad (6)$$

où \tilde{S}_i représente les valeurs principales du tenseur \tilde{S} . Le paramètre matériau a est un entier positif et k un paramètre matériau réel. La surface de plasticité est convexe pour les conditions suivantes : $a \geq 1$ et $-1 \leq k \leq 1$. Ces deux paramètres expriment le rapport entre les contraintes d'écoulement en traction et en compression. Le tenseur \tilde{S} est calculé à partir de :

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{33} \\ \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{23} \\ \tilde{S}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & & & \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & & & \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & & & \\ & & & L_{44} & & \\ & & & & L_{55} & \\ & & & & & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} - X_{11} \\ S_{22} - X_{22} \\ S_{33} - X_{33} \\ S_{12} - X_{12} \\ S_{23} - X_{23} \\ S_{13} - X_{13} \end{bmatrix} \quad (7)$$

S_{ij} sont les composantes du déviateur des contraintes [S] et L_{ij} sont 9 paramètres caractérisant l'anisotropie de l'alliage. Pour normaliser le critère de plasticité par rapport à la direction de laminage, une constante Q doit être définie :

$$Q^a = \sum_{i=1}^3 (|W_i| - kW_i)^a, \quad W_i = \frac{2}{3}L_{i1} - \frac{1}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3}, \quad i = 1..3 \quad (8)$$

La procédure d'identification des 10 paramètres du matériau, a étant fixé à 2, nécessite la réalisation de 10 tests expérimentaux : 2 tests de compression à 0° et 90° par rapport à la direction de laminage, 2 tests de traction à 0° et 90°, 1 traction équi-biaxiale, 1 compression équi-biaxiale et 3 tests de cisaillement pur.

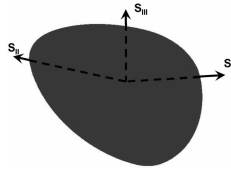


Figure 5 – Surface de plasticité pour l'alliage de titane 4A1 – 1/4O₂ (1%), tracée dans le repère des contraintes principales.

L'identification de ce critère a été réalisée par Cazacu et al. pour un alliage de titane (4A1 – 1/4O₂ 1%) [3]. Le tracé de la surface de plasticité (fig.5) montre bien la convexité et la non symétrie entre traction et compression de ce critère de plasticité anisotrope. Ces mêmes paramètres matériau seront utilisés dans la suite du papier.

3.2 Implémentation du critère de Cazacu

Cette loi de comportement a été implémentée dans le logiciel E.F. Forge®. Toutes les grandeurs sont exprimées dans la base matérielle, comme le souligne l'indice 'mat'. Les matrices de changement de base, explicitées dans la section 2, permettent le transport entre la base de référence et la base matérielle. Les indices 'n' et 'n+1' indiquent le début et la fin de l'incrément.

3.2.1 Calcul de l'incrément de contrainte

Au début de l'incrément, le tenseur des taux de déformation $\{\dot{\epsilon}\}^{n+1}$ et le tenseur des contraintes à l'incrément précédent $\{\sigma\}^n$ sont disponibles. Les axes d'anisotropie sont réactualisés par le gradient de la transformation. L'étape de prédiction élastique suppose que les déformations au cours

de l'incrément sont uniquement élastiques. L'incrément de contrainte $\{\dot{\sigma}_{elas}^{n+1}\}$ est donc calculé :

$$\{\dot{\sigma}_{elas}^{n+1}\} = [C]^{-1} \{\dot{\epsilon}^{n+1}\} \quad (9)$$

Le critère de plasticité F_p est réactualisé. Si $F_p \leq 0$, le comportement est élastique et l'incrément de contrainte déduit du prédictor élastique ($\{\dot{\sigma}^{n+1}\} = \{\dot{\sigma}_{elas}^{n+1}\}$). Autrement, la transformation est élastoplastique et guidée par le système suivant, avec $\dot{\lambda}^p$ le multiplicateur plastique :

$$\begin{cases} \{\dot{\epsilon}_{mat}\}^{n+1} = [C]^{-1} \{\dot{\sigma}_{mat}\}^{n+1} + \dot{\lambda}^p \frac{\partial f}{\partial \{\sigma_{mat}\}^{n+1}} \\ F_p = f(\sigma_{mat} - X_{mat}) - \sigma_0 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

L'utilisation d'un développement limité pour le système (10) permet de corriger l'incrément de contrainte $\Delta\sigma$ et le multiplicateur plastique $\Delta\lambda$. La notation ' ΔA ' représente la valeur ' $\dot{A}.dt$ '.

$$d\Delta\lambda = \frac{F_p + \frac{\partial f}{\partial \sigma} [P]^{-1} (\{\Delta\epsilon\} - [C] \Delta\sigma - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma})}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} [P]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta\lambda}} \quad (11) \quad d\Delta\sigma = [P]^{-1} (\{\Delta\epsilon\} - [C] \Delta\sigma - (\Delta\lambda + d\Delta\lambda) \frac{\partial f}{\partial \sigma}) \quad (12)$$

$$[P] = ([I] + \Delta\lambda [C] \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2})^{-1} [C] \quad (13)$$

Où $[I]$ représente la matrice identité de taille 6. Les dérivées première et seconde du critère de plasticité doivent être calculées pour $\Delta\sigma^{n+1}$. Les corrections successives sur $\Delta\sigma$ et $\Delta\lambda$, associées à un algorithme de recherche linéaire, permettent d'atteindre la convergence [9].

3.2.2 Calcul du module tangent

Le solveur de Forge[®] est implicite, ce qui implique le calcul du module tangent $\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\epsilon}$. Le module tangent $[B_{mat}]$ est obtenu en résolvant l'équation différentielle obtenue en dérivant le critère de plasticité F_p , puis en la combinant avec l'équation (1) du système (10) :

$$[B_{mat}] = [P] - \frac{[P] \frac{\partial f}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} [P]}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} [P] \frac{\partial f}{\partial \sigma} - (\frac{\partial \sigma_0}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \dot{\epsilon}})} \quad (14)$$

Le module tangent est exprimé dans le repère matériel et doit donc être transporté dans le repère de référence, grâce aux changements de base définis précédemment (sec.2).

4 Simulation E.F.

Le modèle élastoplastique anisotrope, décrit dans ce papier, a été validé sur des simulations de gonflage elliptique. Les résultats obtenus avec le critère de Hill 1948 (fig.6) ont été comparés avec ceux simulés avec le critère de Cazacu (fig.7). On remarque l'apparition d'une forte localisation des déformations au sommet de l'ellipse pour le critère de Cazacu. La simulation de l'emboutissage d'un godet cylindrique permet de valider l'apparition de cornes d'emboutissage (fig.8).

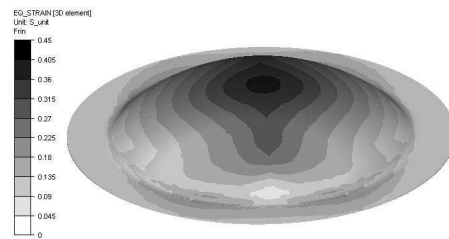


Figure 6 – Déformation plastique équivalente pour le gonflage elliptique : Modélisation par un critère de Hill 1948.

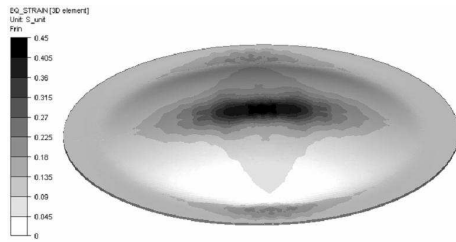


Figure 7 – Déformation plastique équivalente pour le gonflage elliptique : Modélisation par un critère de Cazacu.

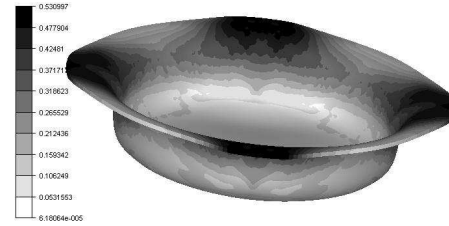


Figure 8 – Déformation plastique équivalente lors de l'emboutissage d'un godet : Modélisation par un critère de Cazacu.

5 Conclusion et Perspectives

Un nouveau modèle permettant la modélisation et la simulation du comportement anisotrope des tôles a été développé et implémenté dans un logiciel E.F. Les axes d'anisotropie situés dans le plan de la tôle suivent la transformation de la matière. Le modèle mécanique est défini par un critère de plasticité, une loi d'écrouissage isotrope et un écrouissage cinématique. Les premières simulations de gonflage elliptique et d'emboutissage d'un godet cylindrique ont été réalisées. Les simulations de mise en forme, réalisées avec le critère de Cazacu, ont été comparées avec celles modélisées par le critère de Hill. La modélisation d'un même matériau par ces deux critères sera réalisée afin de comparer la précision de ceux-ci à des données expérimentales.

6 Remerciements

Ce travail est réalisé dans le cadre du projet OPTIMIST, financé par la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.

Références

- [1] R. Hill. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 : 405–417, 1990.
- [2] F. Barlat, J. W. Yoon, and O. Cazacu. On the linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy. *Int. J. of Plasticity*, 23 :876–896, 2007.
- [3] O. Cazacu, B. Plunkett, and F. Barlat. Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals. *Int. J. of Plasticity*, 22 :1171–1194, 2006.
- [4] L. Duchêne, T. Lelotte, P. Flores, S. Bouvier, and A. M. Habraken. Rotation of axes for anisotropic metal in fem simulations. *Int. J. of Plasticity*, 24 :397–4427, 2008.
- [5] X.Q. Peng and J. Cao. A continuum mechanics based non orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36 :859–874, 2005.
- [6] K. Mattiasson. On the co-rotational finite element formulation for large deformation problems. *PHD Thesis Chalmers University of Technology*, 1983.
- [7] G. A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics : A continuum approach for engineering*. Wiley, 1st edition, 2000.
- [8] J. L. Chaboche. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. of Plasticity*, 24 :1642–1693, 2008.
- [9] R. Knockaert. Numerical and experimental study of the strain localization during sheet forming operations. *PHD Thesis ENSMP*, 2001.